3 වන පාඩම

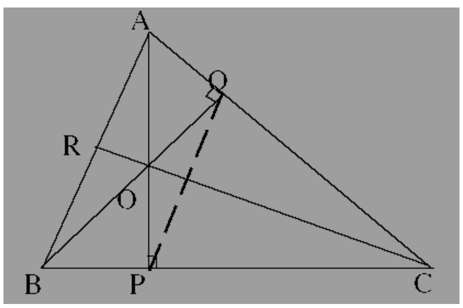
ත්‍රිකෝණයක ශීර්ෂයක සිට එහි සම්මුඛ පාදයට අඳිනු ලබන ලම්බය එහි උච්චයක් (Altitude) ලෙස හැඳින්වේ.

3.11 **ප්‍රමේයය :**

ත්‍රිකෝණයක උච්චයන් තුන ම එක ම ලක්ෂ්‍යයක් හරහා යයි. (එනම් සංගමනය වේ.)

මෙම ප්‍රමේයය සඳහා අප ඉදිරිපත් කිරීමට යන සාධනයේ දී වෘත්තයක කෝණ හා වෘත්ත චතුරස්‍ර පිළිබඳව පාසලේ දී ඉගැන්වෙන ප්‍රතිඵලයන් කිහිපයක් භාවිතා කෙරේ. එබැවින් මෙම සාධනය විමසා බැලීමට පෙර වෘත්තයක කෝණ හා වෘත්ත චතුරස්‍ර පිළිබඳව ඔබ උගත් දෑ සිහියට නංවා ගැනීම වැදගත් වනු ඇත.

මෙම ප්‍රමේයය සාධනය කිරීම සඳහා ABC ත්‍රිකෝණය, සුළු කෝණ ත්‍රිකෝණයක්, මහා කෝණී ත්‍රිකෝණයක් හා සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයක් යන අවස්ථා වෙන වෙනම සළකමු.



මුලින් ම ABC සුළු කෝණී ත්‍රිකෝණයක් වන අවස්ථාව සළකමු.

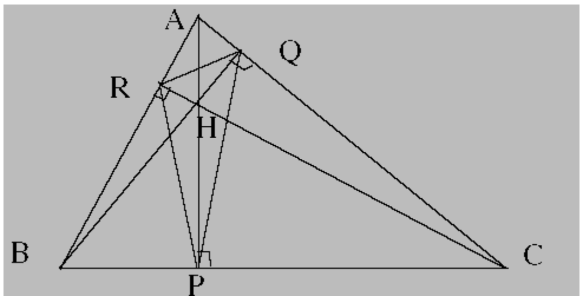
A සිට BC ට ඇති ලම්බයේ අඩිය P ද B සිට AC ට ඇති ලම්බයේ අඩිය Q ද ලෙස ගනිමු. AP හා BQ යන උච්චයන් Oහි දී ඡේදනය දෙ යැයි සළකමු. CO යා කර R හි දී හමු වන පරිදි දික් කරමු. CR යනු ත්‍රිකෝණයේ අනෙක් උච්චය බව පෙන්වා දීමට හැකි නම් එමඟින් ත්‍රිකෝණයේ උච්චයන් තුන සංගමනය වන බව නිගමනය වේ.

සාධනය : P හා Q යා කරමු. දැන් $\angle$OPC හා $\angle$OQC සෘජුකෝණ බැවින් O,P,C හා Q එක ම වෘත්තයක් මත පිහිටන ලක්ෂ්‍ය වේ. $\angle$PCO(=$\angle$PCR) හා $\angle$ PQO යනු එම වෘත්තයේ එකම ඛණ්ඩයේ කෝණ බැවින් $\angle$PCO = $\angle$PQO වේ. $\angle$BPA හා $\angle$BQA සෘජුකෝණ බැවින් A,B,P හා Q එක ම වෘත්තයක් මත පිහිටයි. $\angle$PQB හා $\angle$PAB එකම වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ බැවින් $\angle$PQB= $\angle$PAB වේ. එනම් $\angle$PQO = $\angle$PAR වේ. දැන් $\angle$PCR=$\angle$PAR . එමනිසා P,C,A හා R එක ම වෘත්තයක් මත පිහිටන ලක්ෂ්‍ය වේ. $\angle$CPA හා $\angle$CRA එකම වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ බැවින් හා $\angle$CPA සෘජුකෝණයක් $\angle$CRA ද සෘජුකෝණී වේ. එනම් CR,AB ට ලම්බ වේ. එවිට CR යනු ABC ත්‍රිකෝණයේ අනෙක් උච්චය වේ. එමනිසා ABC ත්‍රිකෝණයේ උච්චයන් තුනම එක ම ලක්ෂ්‍යයක් හරහා යයි.

Q.E.D

ABC මහාකෝණී ත්‍රිකෝණයක් වන අවස්ථාව හා ABC සෘජුකෝණ ත්‍රිකෝණයක් වන අවස්ථාව සාධනය කිරීම ඔබට අභ්‍යාසයක් ලෙස කළ හැක. ත්‍රිකෝණයක උච්චයන් තුනට ම පොදු ලක්ෂ්‍යය එම ත්‍රිකෝණයේ ලම්බ කේන්ද්‍රය (Orthocenter) ලෙස හැඳින්වේ. ලම්බ කේන්ද්‍රය බොහෝ මට H මඟින් සංකේතවත් කෙරේ.

ත්‍රිකෝණයක ශීර්ෂවල සිට සම්මුඛ පාදවලට අඳිනු ලබන ලම්බයන් ගේ අඩි ශීර්ෂ වශයෙන් ඇති ත්‍රිකෝණයට එම මුල් ත්‍රිකෝණයේ පාදික ත්‍රිකෝණය (Pedal triangle) යැයි කියනු ලැබේ.



ඉහත ABC ත්‍රිකෝණයේ AP, BQ හා CR යනු උච්චයන් නම් PQR ත්‍රිකෝණය, ABC ත්‍රිකෝණයේ පාදික ත්‍රිකෝණය වෙයි.

3.12 **ප්‍රමේයය :**

සුළු කෝණී ත්‍රිකෝණයක උච්චයන් මඟින් එහි පාදික ත්‍රිකෝණයේ කෝණ සමච්ඡේදනය කරයි.

මෙම ප්‍රමේයයට අනුව සුළු කෝණික ත්‍රිකෝණයක උච්චයන් එහි පාදික ත්‍රිකෝණයේ කෝණ සමච්ඡේදකයන් වේ. ත්‍රිකෝණයක කෝණ සමච්ඡේදකයන් සංගමනය වන ලක්‍ෂ්‍යය එහි අන්තර් කේන්ද්‍රය බැවින්, සුළු කෝණික ත්‍රිකෝණයක ලම්බ කේන්ද්‍රය එහි පාදික ත්‍රිකෝණයේ අන්තර් කේන්ද්‍රය වන බව මෙම ප්‍රමේයය මඟින් කිය වේ.

3.12 ප්‍රමේයය සාධනය කිරීමට යාමේ දී ඉහත ABC ත්‍රිකෝණයේ පිළිවෙළින් AP, BQ හා CR මඟින් $\angle$RPQ , $\angle$PQR හා $\angle$QRP සමච්ඡේදනය වන බව පෙන්වා දිය යුතු වේ.

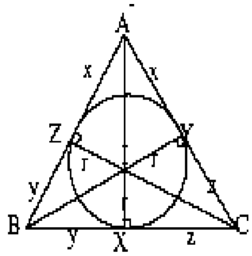
සාධනය - $\angle$HPC හා $\angle$HQC සෘජුකෝණ බැවින් H,P,C හා Q එක ම වෘත්තය මත පිහිටයි. එමනිසා $\angle$HPQ = $\angle$HCQ (එකම වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ) වේ. $\angle$HPB හා $\angle$HRB සෘජුකෝණ බැවින් H,R,B හා P එකම වෘත්තය මත පිහිටයි. එමනිසා $\angle$HPR = $\angle$HBR (එකම වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ) වේ. දැන්, $\angle$BQC = $\angle$BRC සෘජුකෝණයක් බැවින් B,R,Q හා C එකම වෘත්තය මත පිහිටයි. එමනිසා $\angle$HCQ= $\angle$HBR (එකම වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ) වේ. එමනිසා $\angle$HPQ = $\angle$HPR වේ. එබැවින් AP මඟින් $\angle$RPQ සමච්ඡේ දනය වේ. මේ අන්දමටම BQ මඟින් $\angle$PQR හා CR මඟින් $\angle$QRP සමච්ඡේදනය වන බව පෙන්වා දිය හැක.

Q.E.D

දැන් ත්‍රිකෝණ හා සම්බන්ධ වෘත්තයන් හා ත්‍රිකෝණයේ පාදවල දිගවල් අතර ඇති සම්බන්ධතා කිහිපයක් පිළිබඳව විමසා බලමු.

ත්‍රිකෝණයක කෝණවල අභ්‍යන්තර සමච්ඡේදකයන් තුනම එක ම ලක්‍ෂ්‍යයක් හරහා යන බවත් එම ලක්‍ෂ්‍යය ත්‍රිකෝණයේ අන්තර් කේන්ද්‍රය ලෙස හැඳින්වෙන බවත් ඔබ පාසලේ දී ඉගෙන ගෙන ඇත. ත්‍රිකෝණයක අන්තර් කේන්ද්‍රයේ සිට පාදවලට ඇති ලම්බ දුරවල් සමාන වන අතර එම ලම්බ දුර අරය ලෙසත් අන්තර් කේන්ද්‍රය කේන්ද්‍රය ලෙසත් ගෙන අඳිනු ලබන වෘත්තය මඟින් ත්‍රිකෝණයේ පාද අභ්‍යන්තරව ස්පර්ශ කෙරේ. එම වෘත්තය ත්‍රිකෝණයේ අන්තර් වෘත්තය ලෙස හැඳින්වෙන බව ඔබ දැනටමත් දන්නා කරුණකි.

දැන් ABC නම් ඕනෑම ත්‍රිකෝණයක් සළකමු. එහි BC, CA සහ AB පාදවල දිගවල් පිළිවෙළින් a, b හා c ලෙස ගනිමු. (එනම් A කෝණයට සම්මුඛ පාදයේ දිග a ද B කෝණයට සම්මුඛ පාදයේ දිග b ද C කෝණයට සම්මුඛ පාදයේ දිග c ද ලෙස ගනිමු.) ABC ත්‍රිකෝණයේ අන්තර් වෘත්තය මඟින් BC, CA හා AB පාද පිළිවෙලින් X, Y හා Zහි දී ස්පර්ශ වේ යැයි සළකමු.



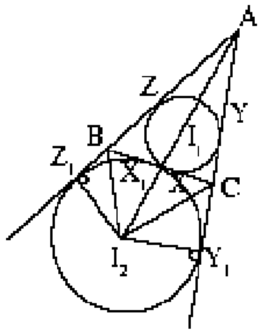
වෘත්තයකට බාහිරින් පිහිටි ලක්‍ෂ්‍යයක සිට එම වෘත්තයට අඳිනු ලබන ස්පර්ශක දිගින් සමාන බැවින් AY=AZ, BZ=BX හා CX=CY වේ. දැන් AY=AZ=x, BZ=BX=y හා CX = CY=z ලෙස ගනිමු. එවිට, y+z=a, z+x =b yd x+y =c ලෙස ලැබේ. මෙම සමීකරණ තුන එකතු කිරීමෙන් 2x+2y+2z = a+b+c ලෙස ලැබේ. s යනු ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතියෙන් අඩක් නම්. 2x+2y+2z = 2s එනම්, x+y+z= s වේ. දැන්, x = s-(y+z) = S-a වේ. ඒ අයුරින් ම y = s-b හා z= s-c ලෙස ද ලබා ගත හැකි ය.

ABCහි අන්තර් වෘත්තයේ අරය r ලෙස ගනිමු. a යනු BC පාදයේ දිග හා r යනු I සිට BCට අඳින ලද ලම්බයේ දිග බැවින් IBC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $\frac{1}{2}ar$ වේ. මෙපරිද්ම ICA හා IAB ත්‍රිකෝණවල වර්ගඵලයන් පිළිවෙළින් $\frac{1}{2}br$ හා $\frac{1}{2}cr$ බව ලබා ගත හැකි ය. දැන් ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය IBC, ICA හා IAB ත්‍රිකෝණවල වර්ගඵලයන්ගේ එකතුව බැවින්, ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr=\frac{1}{2}(a+b+c)r=sr$ වේ.

3.13ප්‍රමේයය : ත්‍රිකෝණයක වර්ගඵලය එහි අන්තර් වෘත්තයේ අරයේ සහ පරිමිතියෙන් අඩක ගුණිතයට සමාන වේ.

ත්‍රිකෝණයක කෝණ දෙකක බාහිර සමච්ඡේදක හා ඉතිරි කෝණයේ අභ්‍යන්තර සමච්ඡේදකය එකම ලක්‍ෂ්‍යයක හරහා යයි. ත්‍රිකෝණයක් සඳහා එවැනි ලක්‍ෂ්‍යයන් තුනක් පවතින අතර එම ලක්‍ෂ්‍යයන් ත්‍රිකෝණයේ බහිර් කේන්ද්‍ර (Excenter) ලෙස හැඳින්වේ. බහිර් කේන්ද්‍ර ත්‍රිකෝණයට පිටතින් පිහිටන අතර බහිර් කේන්ද්‍රයේ සිට ත්‍රිකෝණයේ පාදවලට ඇති ලම්බ දුරවල් සමාන වේ. බහිර් කේන්ද්‍ර කේන්ද්‍රය කොට ගෙන ත්‍රිකෝණයේ පාද තුනම ස්පර්ශ වන පරිදි අඳිනු ලබන වෘත්තයක් ත්‍රිකෝණයේ බහිර් වෘත්තයක් (Excircle or escribed circle) ලෙස හැඳින්වේ. මෙම කරුණු සියල්ලම ඔබ පාසලේ දී ඉගෙන ගන්නා කරුණු වේ.

දැන් පහත ABC ත්‍රිකෝණය සළකමු.

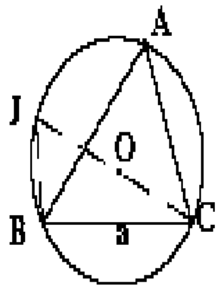


එහි අන්තර් වෘත්තය මගින් BC, CA හා AB පාද පිළිවෙළින් X, Y හා Zහි දී ස්පර්ශ කරනු ලැබේ. BC පාදය හා දික් කරන ලද AB හා AC පාද ස්පර්ශ කරන පරිදි වූ බහිර් වෘත්තයෙන් BC පාදය X_1හි දී ද දික් කරන ලද AB හා AC පාද Z_1 හා Y_1හි දී ද ස්පර්ශ වේ යැයි ගනිමු. පෙර පරිදි ම BC, CA හා AB පාදවල දිගවල් පිළිවෙළින් a, b, c හා S යනු ABC ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතියෙන් අඩක් ලෙස සළකමු. දැන් වෘත්තයකට බාහිරින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශක දිගින් සමාන බැවින්, $AZ_1=AY_1$ වේ. තවද, $AZ_1+AY_1= AB+BZ_1+AC+CY_1 = AB+BX_1+CX_1+AC = AB+BC+AC = a+b+c = 2s$. දැන් $AZ_1 = AY_1$ බැවින්, $AZ_1=AY_1=s$ වේ. එනම්, ත්‍රිකෝණයක ශීර්ෂයක සිට සම්මුඛ පාදයට පිටතින් ඇති බහිර් වෘත්තයට අඳිනු ලබන ස්පර්ශකවල දිග s (එනම් පරිමිතියෙන් අඩක්) වේ. දැන් $BZ_1=AZ_1-AB = s-c$ වේ. ඒ අන්දමට, $CY_1 = s-b$ වේ. එබැවින්, $BZ_1+BX_1 = s-c$ හා $CY_1 = CX_1 = s-b$ වේ. $ZZ_1 = AZ_1-AZ=s-(s-a) =a$ වේ. ඒ අයුරින්ම $YY_1=a$ බව ද ලබා ගත හැකි ය. $CX=CY$ හා $CX_1=CY_1$ බැවින්, $CX+CX_1 = CY+CY_1= YY_1 = a$ වේ. තව ද $CX_1+BX_1= a$ ද වේ. එබැවින්, $CX=BX_1$ ලෙස ලැබේ. මේ අයුරින් ම, $BX=CX_1$ බව ද පෙන්වා දිය හැකි ය. දැන්, දී ඇති බහිර් වෘත්තයේ අරය r_1 නම්, ABI_2 ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය, $\frac{1}{2}cr_1$ ල ද ACI_2 ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය, $\frac{1}{2}br_1$ ද BCI_2 ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය, $\frac{1}{2}ar_1$ ද වේ. $(ABC) = (ABI_2) + (ACI_2)-(BCI_2)$ බැවින්, $(ABC) = \frac{1}{2}cr_1 + \frac{1}{2}br_1 - \frac{1}{2}ar_1 = \frac{1}{2}r_1\,(c+b-a) = \frac{1}{2}r_1\,(2s-2a) = r_1\,(s-a)$ වේ.

ඔබ උසස් පෙළ ත්‍රිකෝණමිතිය පාඩම්වල දී ඉගෙන ගන්නා සයින් ප්‍රමේයය බොහෝ ජ්‍යාමිතිය ගණිත ගැටලු විසඳීමේ දී ඉතා ප්‍රයෝජනවත් ප්‍රතිඵලයකි. එහෙත් බොහෝ විට උසස් පෙළ පන්තියේ දී සයින් ප්‍රමේයය ඉගැන්වෙන්නේ එහි වඩාත් ම සාධාරණ ආකාරයෙන් නොවේ. එබැවින් විවිධ ආකාරයේ ගණිත ගැටලුවල දී වඩාත් ප්‍රයෝජනවත් වන පරිදි වඩාත් සාධාරණ ආකාරයකින් මෙහි දී සයින් ප්‍රමේයය ඉදිරිපත් කරමු.

3.14 ප්‍රමේයය: පරිවෘත්තයේ අරය R වන පරිදි වූ ABC ත්‍රිකෝණයක BC,CA හා AB පාදවල දිගවල් පිළිවෙළින් a, b හා c නම්, $\frac{a}{Sin\ A} = \frac{b}{Sin\ B} = \frac{c}{Sin\ C}$ =2R වේ.

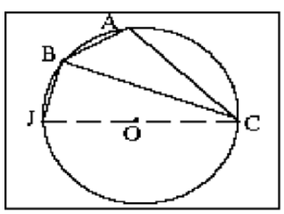
මුලින්ම මෙම ප්‍රමේයය ABC සුළු කෝණී ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සාධනය කරමු. ABC ත්‍රිකෝණයේ ශිර්ෂ තුනම හරහා යන එකම එක වෘත්තයක් පවතින බවත් එය ත්‍රිකෝණයේ පරිවෘත්තය බවත් ඔබ ඉගෙන ගෙන ඇත. එමෙන්ම මෙහි දී ABC සුළු කෝණී ත්‍රිකෝණයක් බැවින් එහි පරිවෘත්තයේ කේන්ද්‍රය ත්‍රිකෝණය තුළ පිහිටන බව ද ඔබ දන්නා කරුණකි. පරිවෘත්තයේ කේන්ද්‍රය O ලෙස ගනිමු.



සාධනය : C හරහා යන CJ විෂ්කම්බය ඇඳ BJ යා කරමු. දැන් $\angle CBJ$ යනු අර්ධ වෘත්තයක කෝණයක් බැවින් $\angle CBJ$ යනු සෘජුකෝණයක් වේ. එබැවින් $\angle BCJ$ යනු සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයකි. එබැවින් $\mathrm{Sin}J = \frac{BC}{CJ} = \frac{a}{2R}$ වේ. දැන් $\angle BJC$ හා $\angle BAC$ එකම වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ බැවින්, $\angle BJC = \angle BAC$ වේ. එබැවින් $\mathrm{Sin}A = \frac{a}{2R}$ වේ. මේ අයුරින් ම $\mathrm{Sin}B = \frac{b}{2R}$ හා $\mathrm{Sin}C = \frac{c}{2R}$ බව ද පෙන්වා දිය හැකි ය.

Q.E.D

දැන් ABC මහා කෝණී ත්‍රිකෝණයක් වන අවස්ථාව සළකා බලමු. මෙහි දී පරිවෘත්තයේ කේන්ද්‍රය ත්‍රිකෝණයට පිටතින් පිහිටයි. මෙහි දී ද C හරහා යන CJ විෂ්කම්භය ඇඳ BJ යා කරමු.



මෙහිදී ද $\angle CBJ$ සෘජුකෝණයක් බැවින් BJC සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයක් ද $\mathrm{Sin}J = \frac{BC}{CJ} = \frac{a}{2R}$ වේ. දැන් ABJC වෘත්ත චතුරස්‍රයක් බැවින් $\angle A + \angle J = 180^0$ වේ. එබැවින් $\angle J = 180^0 - \angle A$ වේ. දැන් $\mathrm{Sin}J = \mathrm{Sin}(180^0 - A) = \mathrm{Sin}\ A$ බැවින් $\mathrm{Sin}A = \frac{a}{2R}$ වේ. මෙපරිදිම $\mathrm{Sin}B = \frac{b}{2R}$ හා $\mathrm{Sin}C = \frac{c}{2R}$ බව ද පෙන්වා දිය හැකිය.

Q.E.D

සෘජුකෝණ ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සයින් ප්‍රමේයය සත්‍ය බව ඉතා පහසුවෙන් පෙන්වා දිය හැක.