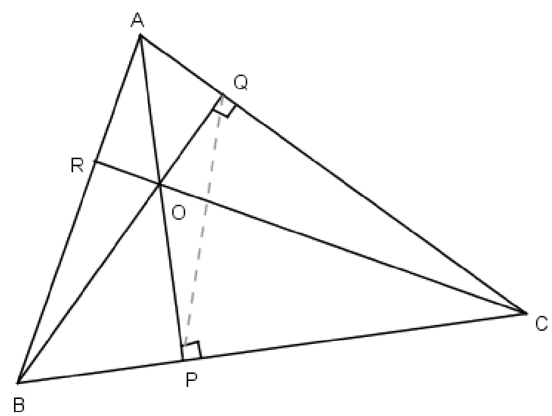
பாடம் 3

முக்கோணியொன்றின் உச்சியொன்றிலிருந்து எதிர்ப்பக்கத்திற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்து Altitiude எனப்படும்.

தேற்றம் 3.11: முக்கோணியொன்றின் செங்குத்துகள் ஒரு புள்ளியினூடாகச் செல்லும்

இத் தேற்றத்தை நிறுவுவதற்காக வட்டத் துண்டக்கோணங்கள் பற்றியும் வட்ட நாற்பக்கல்கள் பற்றியும் நீங்கள் பாடசாலையில் கற்ற சில விடயங்கள் பயன்படுத்துப்படும். ஆகவே மேற்தரப்பட்ட விடயங்கள் பற்றி ஏற்கனவே கற்ற விடயங்களை நினைவுப்படுத்திக் கொள்ளல் முக்கியமானது.

நிறுவலுக்காக முக்கோணி ABC யானது கூர்ங்கோண, செங்கோண, விரிகோண முக்கோணிகளாகும் சந்தர்ப்பங்களைத் தனித்தனியாகக் கருத்தில் கொள்வோம்.



முதலில் முக்கோணி ABC கூர்ங்கோண முக்கோணியாகவுள்ள சந்தர்ப்பத்தைக் கருதுவோம்.

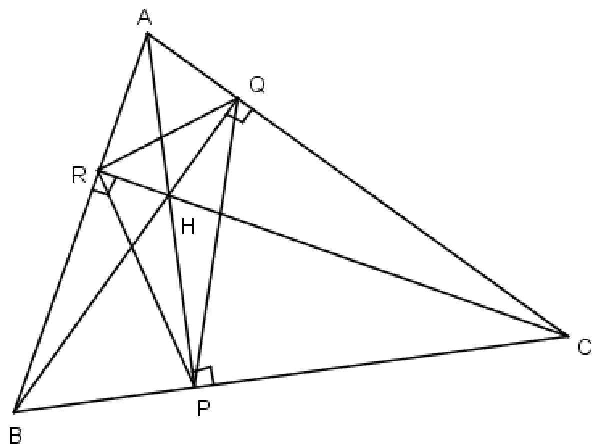
உச்சிகள் A, B யிலிருந்து எதிர்ப்பக்கங்களுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துகளின் அடிகள் முறையே P, Q ஆகும். செங்குத்துகள் AP, BQ என்பன O வில் இடைவெட்டுகின்றன என்க. நீட்டப்பட்ட CO ஆனது AB ஐ R இல் சந்திக்கின்றது என்க. CR என்பது AB யிற்கு செங்குத்து எனக் காட்டுவது போதுமானதாகும்.

நிறுவல் : PQ வை இணைக்க. $\angle OPC, \angle OQC$ என்பன செங்கோணங்களாதலால் O, P, C, Q என்பன ஒரு வட்டப் புள்ளிகளாகும். $\angle PCO(= \angle PCR)$, $\angle PQO$ என்பன ஒரே துண்டக்கோணங்கள் என்பதால் $\angle PCO = \angle PQO$ ஆகும். $\angle BPA, \angle BQA$ என்பன செங்கோணங்களாதலால் A, B, P, Q என்பன ஒரு வட்டப் புள்ளிகளாகும். $\angle PQB, \angle PAB$ என்பன ஒரே துண்டக்கோணங்கள் என்பதால் $\angle PCR = \angle PAR$ ஆகும். ஆகவே P, C, A, R என்பன ஒரு வட்டப் புள்ளிகள். $\angle CPA, \angle CRA$ என்பன ஒரே துண்டக்கோணங்களாதலால் $\angle CPA, \angle CRA$ என்பன செங்கோணங்களாகும். எனவே $CR \perp AB$.

$Q.E.D$

செங்கோண, விரிகோண முக்கோணிகளாகும் சந்தர்ப்பங்களுக்கான நிறுவல்கள் பயிற்சியாக விடப்படுகின்றன. முக்கோணியொன்றின் செங்குத்துகள் சந்திக்கும் புள்ளி முக்கோணியின் நிமிர்மையம் $(Orthocenter)$ என அழைக்கப்படும். இது பொதுவாக H இனால் குறியிடப்படும்.

முக்கோணியொன்றின் செங்குத்துகளின் அடிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணி முக்கோணியின் பாத முக்கோணி $(Pedal\ triangle)$ என அழைக்கப்படும்.



படத்தில் ΔPQR ஆனது ΔABC யின் பாத முக்கோணியாகும்.

தேற்றம் 3.12: கூர்ங்கோண முக்கோணியொன்றின் செங்குத்துகள் பாத முக்கோணியின் கோணங்களை இருகூறிடுகின்றன

இதற்கிணங்க கூர்ங்கோண முக்கோணியொன்றின் செங்குத்துகள் பாத முக்கோணியின் கோண இருசமகூறாக்கிளாக அமைகின்றன. எனவே கூர்ங்கோண முக்கோணியொன்றின் நிமிர் மையமானது அதன் பாத முக்கோணியின் உள்வட்ட மையமாகும்.

தேற்றம் 3.12 ஐ நிறுவுவதற்காக மேலே ΔABC யில் AP, BQ, CR என்பன முறையே $\angle RPQ, \angle PQR, \angle QRP$ ஐ இருசமகூறிடுகின்றன எனக் காட்டுதல் வேண்டும்

நிறுவல் : $\angle HPC = \angle HQC = 90° \Rightarrow HPCQ$ ஓர் வட்டநாற்பக்கல். ஆகவே $\angle HPQ = \angle HCQ$ (ஒரே துண்டக் கோணங்கள்). $\angle HPB = \angle HRB = 90° \Rightarrow HRBP$ ஓர் வட்டநாற்பக்கல். ஆகவே $\angle HPR = \angle HBR$ (ஒரே துண்டக் கோணங்கள்). $\angle BQC = \angle BRC = 90° \Rightarrow BRQC$ ஓர் வட்டநாற்பக்கல். ஆகவே $\angle HCQ = \angle HPR$ (ஒரே துண்டக் கோணங்கள்)$\Rightarrow$ AP யானது $\angle RPQ$ ஐ இருசமகூறிடுகிறது. இவ்வாறே, BQ, CR என்பன முறையே $\angle PQR, \angle QRP$ ஐ இருசமகூறிடுகின்றன எனக் காட்டலாம்.

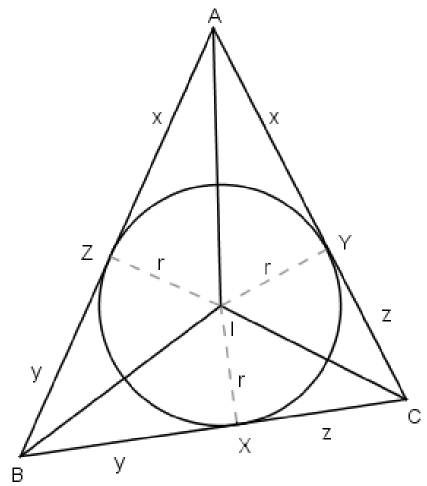
$Q.E.D$

இப்போது முக்கோணிகளுடன் தொடர்புபட்ட வட்டங்களுக்கும் பக்கங்களுக்குமிடையிலான சில தொடர்புகளைப் பார்ப்போம்.

முக்கோணியொன்றின் கோண உள்இருசமகூறாக்கிகள் யாவும் ஒரு புள்ளியினூடாக செல்லும் என்பதையும் இப்புள்ளியிலிருந்து பக்கங்களுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துகளின் நீளங்கள் சமனாவதால் இப்புள்ளியை மையமாகவும் அந்நீளத்தை ஆரையாகவும் கொண்டு வரையப்படும் வட்டமானது

பக்கங்களைத் தொடுமென்பதை நீங்கள் அறிவீர்கள். எனவே இப்புள்ளி உள்வட்ட மையம் எனவும் இவ்வட்டம் உள்வட்டம் எனவும் அழைக்கப்படுகிறது.

யாதாயினும் ΔABC யினைக் கருதுக. பக்கங்கள் BC, CA, AB என்பவற்றின் நீளங்கள் முறையே a, b, c என்க (அதாவது கோணம் A யிற்கெதிராகவுள்ள பக்கம் a எனவும் அதாவது கோணம் B யிற்கெதிராகவுள்ள பக்கம் b எனவும் கோணம் C யிற்கெதிராகவுள்ள பக்கம் c எனவும் குறியிடப்படும்). ΔABC யின் உள்வட்டம் பக்கங்கள் BC, CA, AB ஐ முறையே X, Y, Z இல் தொடுகின்றதென்க.



வட்டமொன்றிற்கு வெளிப்புள்ளியொன்றிலிருந்து வரையப்படும் தொடலிகளின் நீளங்கள் சமனென்பதால் $AY = AZ, BZ = BX, CX = CY$. $AY = AZ = x, BZ = BX = y, CX = CY = z$ என்க. எனவே $y + z = a, z + x = b, x + y = c$ என்பது பெறப்படும். இதிலிருந்து $2x + 2y + 2z = a + b + c$. s என்பது முக்கோணியின் அரைச்சுற்றளவாயின் $2x + 2y + 2z = 2s \Rightarrow x + y + z = s \Rightarrow x = s - (y + z) = s - a$. இவ்வாறே, $y = s - b, z = s - c$.

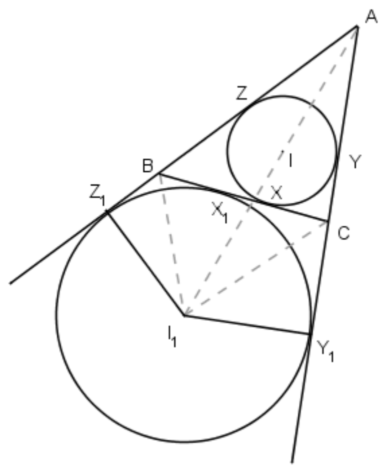
ΔABC யின் உள்வட்ட ஆரை r, உள்வட்ட மையம் I என்க. $[ABC]$ இனால் ΔABC யின் பரப்பு குறிக்கப்படுகின்றது என்க

$$[ABC] = [IBC] + [ICA] + [IAB] = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}(a + b + c)r = sr \quad (\because [IBC] = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot r)$$

தேற்றம் 3.31: முக்கோணியொன்றின் பரப்பளவானது அரைச்சுற்றளவினதும் உள்வட்ட ஆரையினதும் பெருக்கத்திற்கு சமனாகும்

முக்கோணியொன்றின் இரு கோணங்களின் வெளியிருகூறாக்கிகளும் மற்றைய கோணத்தின் உள்ளிருகூறாக்கியும் ஒரு புள்ளியினூடாகச் செல்லும். இப்புள்ளி முக்கோணிக்கு வெளியே அமைவதுடன் அதிலிருந்து பக்கங்களுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துகள் நீளத்தில் சமனாகவுள்ளதால் இப்புள்ளியை மையமாகவும் இந்நீளத்தை ஆரையாகவும் கொண்டு வரையப்படும் வட்டமானது பக்கங்களைத் தொடும். ஆகவே இவ்வட்டம் வெளிவட்டமெனவும் $(Excircle\ or\ escribed\ circle)$ இப்புள்ளி வெளிவட்ட மையமெனவும் $(Excenter)$ அழைக்கப்படும். முக்கோணியொன்றிற்கு இவ்வாறான மூன்று வெளிவட்டங்கள் உள்ளன. இவை யாவும் நீங்கள் அறிந்த விடயங்கள்.

இப்போது கீழே ΔABC ஐக் கருதுக

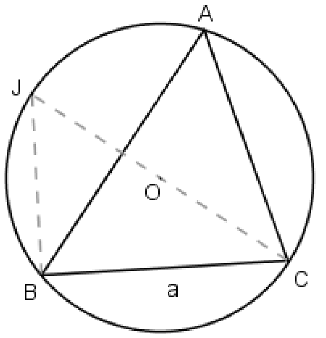


அதன் உள்வட்டமானது பக்கங்கள் BC, CA, AB ஐ முறையே X, Y, Z இல் தொடுகின்றதென்க. உச்சி A யிற்கெதிராகவுள்ள வெளிவட்டமானது பக்கம் BC யினை X_1 இலும் நீட்டப்பட்ட AB, AC என்பவற்றை முறையே Z_1, Y_1 இலும் தொடுகின்றதென்க. முன்பு போலவே BC, CA, AB என்பவற்றின் நீளங்கள் முறையே a, b, c எனவும் முக்கோணியின் அரைச்சுற்றளவு s எனவும் கொள்க.
வட்டமொன்றிற்கு வெளிப்புள்ளியொன்றிலிருந்து வரையப்படும் தொடலிகளின் நீளங்கள் சமனென்பதால்
$AZ_1 + AY_1 = AB + BZ_1 + AC + CY_1 = AB + BX_1 + CX_1 + AC = AB + BC + CA = a + b + c = 2s.$
$AZ_1 = AY_1$ என்பதால் $AZ_1 = AY_1 = s$. எனவே முக்கோணியொன்றின் உச்சியொன்றிலிருந்து அதற்கெதிராகவுள்ள வெளிவட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடலிகளின் நீளங்கள் s ஆகும்.
$BZ_1 = AZ_1 - AB = s - c.$ இதனால் $BZ_1 = BX_1 = s - c$, $CY_1 = CX_1 = s - b.$
$ZZ_1 = AZ_1 - AZ = s - (s - a) = a.$ இவ்வாறே, $YY_1 = a.$
$CX = CY, CX_1 = CY_1 \Rightarrow CX + CX_1 = CY + CY_1 = YY_1 = a.$ அத்துடன் $CX_1 + BX_1 = a$ ஆகும்
$\Rightarrow CX = BX_1$. இவ்வாறே $BX = CX_1$. வெளிவட்டத்தின் ஆரை r_1, மையம் I_1 என்க.
$[ABC] = [ABI_2] + [ACI_2] - [BCI_2] = \frac{1}{2}cr_1 + \frac{1}{2}br_1 - \frac{1}{2}ar_1 = \frac{1}{2}r_1(c + b - a) = \frac{1}{2}r_1(2s - 2a) = r_1(s - a)$

நீங்கள் பாடசாலையில் உயர்தர வகுப்புகளில் கற்கும் சைன் நெறியானது பெருமளவு கேத்திரகணித பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கு மிகவும் உதவியாக அமையும். எனினும் அநேகமான பாடசாலைகளில் சைன் நெறி நன்கு பொதுமைப்படுத்திய வடிவத்தில் கற்பிக்கப்படுவதில்லை. ஆகவே பெருமளவு பிரசினங்களில் உதவியாக அமையும் பின்வரும் வடிவத்தைக் கவனிப்போம்

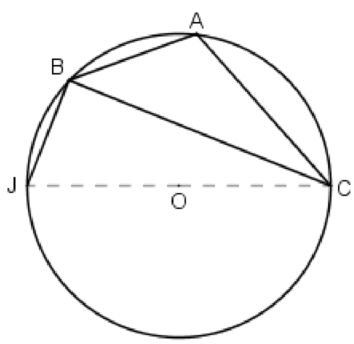
தேற்றம் 3.14: சுற்று வட்ட ஆரை R ஆகவுடைய ΔABC யின் பக்கங்கள் BC, CA, AB என்பவற்றின் நீளங்கள் முறையே a, b, c ஆயின் $\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC} = 2R$

முதலில் ΔABC கூர்ங்கோண முக்கோணியாகவுள்ள சந்தர்ப்பததைக் கருதுவோம். ΔABC இன் மூன்று உச்சிகளுக்கூடாகவும் செல்லும் ஒரே ஒரு வட்டம் உள்ளது என்பதை நீங்கள் கற்றுள்ளீர்கள். அத்துடன் ΔABC கூர்ங்கோண முக்கோணியென்பதால் அதன் சுற்றுவட்ட மையம் முக்கோணியினுள் அமையும் என்பதையும் நீங்கள் அறிவீர்கள். சுற்றுவட்ட மையம் O என்க



நிறுவல் : C யினூடு செல்லும் விட்டம் CJ ஐ வரைந்து BJ ஐ இணைக்க. $\angle CBJ$ அரைவட்ட கோணமென்பதால் செங்கோணமாகும். எனவே ΔCBJ ஓர் செங்கோண முக்கோணியாகும் $\Rightarrow$ $sinJ = \frac{BC}{CJ} = \frac{a}{2R}$. $\angle BJC, \angle BAC$ என்பன ஒரே துண்டக் கோணங்களென்பதால் $\angle BJC = \angle BAC$ $\Rightarrow$ $sinA = \frac{a}{2R}$. இவ்வாறே, $sinB = \frac{b}{2R}$, $sinC = \frac{c}{2R}$ எனக் காட்டலாம்.

இப்போது ΔABC விரிகோண முக்கோணியாகவுள்ள சந்தர்ப்பததைக் கருதுவோம். இச்சந்தர்ப்பத்தில் முக்கோணியின் சுற்று வட்ட மையம் முக்கோணிக்கு வெளியே அமையும். C யினூடு செல்லும் விட்டம் CJ ஐ வரைந்து BJ ஐ இணைக்க.



$\angle CBJ$ செங்கோணமென்பதால் ΔCBJ ஓர் செங்கோண முக்கோணியாகும் $\Rightarrow$ $sinJ = \frac{BC}{CJ} = \frac{a}{2R}$. $ABJC$ வட்ட நாற்பக்கல்
என்பதால் $\angle A + \angle J = 180° \Rightarrow \angle J = 180° - \angle A \Rightarrow sinJ = \sin(180° - A) = sinA \Rightarrow sinA = \frac{a}{2R}$.
இவ்வாறே, $sinB = \frac{b}{2R}$, $sinC = \frac{c}{2R}$ எனக் காட்டலாம்.

ΔABC செங்கோண முக்கோணியாகவுள்ள சந்தர்ப்பத்தில் நிறுவல் மிகவும் இலகுவானது

$Q.E.D$

1. P யானது செங்கோண முக்கோணி ABC யின் விட்டம் AC யின் மீது முக்கோணிக்கு வெளியே வரையப்பட்ட சதுரத்தின் மையமெனின் BP யானது $\angle ABC$ யை இருசமகூறிடும் எனக் காட்டுக.

2. முக்கோணி ABC யின் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணியின் நிமிர்மையமானது முக்கோணி ABC யின் சுற்றுவட்டமையத்துடன் ஒருங்கு பொருந்துமெனக் காட்டுக.

3. Q ஆனது $\angle QBC = \angle QDC = 90°$ ஆகுமாறு இணைகரம் $ABCD$ யினுள் அமைந்துள்ள புள்ளியாயின் $BD \perp AQ$ எனக் காட்டுக.

4. முக்கோணி ABC யில் E யானது பக்கம் BC யின் நடுப்புள்ளியாவதுடன் F ஆனது $AC = 3FC$ ஆகுமாறு AC மீது அமைந்துள்ள புள்ளியாகும். ΔFEC, நாற்பக்கல் $ABEF$ என்பவற்றின் பரப்புகளுக்கிடையிலான விகிதத்தைக் காண்க

5. சதுரம் $ABCD$ யினுள் $\angle ODC = \angle OCD = 15°$ ஆகுமாறு புள்ளி O அமைந்துள்ளது. முக்கோணி OBA ஓர் சமபக்க முக்கோணியாகும் எனக் காட்டுக.

இப்பிரசினங்களுக்கான தீர்வுகளை பின்வரும் முகவரிக்கு 2009 ஒக்டோபர் 7 ஆம் திகதிக்கு முன்னதாகக் கிடைக்குமாறு அனுப்பவும்.

Sri Lanka Olympiad Mathematics Foundation,

Department of Mathematics,

University of Colombo,

Colombo 03.

மேலதிக விபரங்களுக்காக எமது இணையத்தளமான www.slmathsolympiad.org இனை பார்வையிடவும்