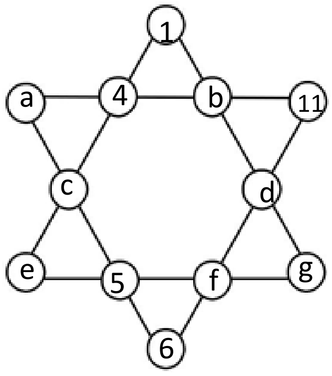
SLMC 13 ආදර්ශ ප්‍රශ්න ප්‍රශ්න හා විසඳුම්

1. මෙහි දක්වා ඇති මැජික් තරුවේ, a, b, c, d, e, f හා g සඳහා $\{2, 3, 7, 8, 9, 10, 12\}$ යන කුලකයේ ඇති වෙනස් අගයයන් ගත හැකි අතර, දාරයක් දිගේ ඕනෑම සංඛ්‍යා 4 ක ඓක්‍යය 26 කි. g හි අගය වන්නේ,



(A) 7 (B) 8 (C) 9
(D) 10 (E) 11

විසඳුම
$6 + f + d + 11 = 26$ වේ. එබැවින්, $f + d = 9$ වේ. එනම් $\{d, f\} = \{2, 7\}$ වේ. තවද, $a + 4 + b + 11 = 26$ වන නිසා, $a + b = 11$. එනම්, $\{a, b\} = \{3,8\}$ වේ. $a + c + 5 + 6 = 26$ නිසා $a + c = 15$ වේ. එනම්, $\{a, c\} = \{3,12\}$ වේ. දැන් $\{a, b\} = \{3,8\}$ ද, $\{a, c\} = \{3,12\}$ ද වන හෙයින්, $a = 3, b = 8, c = 12$ වේ. $1 + b + d + g = 1 + 8 + d + g = 26 \Rightarrow d + g = 17$ නිසා $\{d, g\} = \{10, 7\}$. $\{d, f\} = \{2, 7\}$ සහ $\{d, g\} = \{10, 7\}$, නිසා $g = 10$ වේ. එමනිසා පිළිතුර (D) වේ.

2. a, b, c, d යනු සෘණ නොවන නිඛිලද, $a + b + c + d = 4$ ද වේ නම් $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ ට ගත හැකි වෙනස් අගයයන් ගණන

(A) 2 (B) 3 (C) 4
(D) 5 (E) 6

විසඳුම
a, b, c, d සෘණ නොවන සහ $a + b + c + d = 4$ විට, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ ට පහත අගයන් ගත හැක.

$0^2 + 0^2 + 0^2 + 4^2 = 16$
$0^2 + 0^2 + 1^2 + 3^2 = 10$
$0^2 + 0^2 + 2^2 + 2^2 = 8$
$0^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$
$1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 4$

එමනිසා පිළිතුර (D) වේ.

3. පැය කටුව 4 සිට 5 දක්වා පැයක් ඇතුළත යන විට, එයත් මිනිත්තු කටුවත් හමුවන්නේ කුමන කාලයකදී ද?

(A) $4{:}18\frac{1}{3}$ (B) $4{:}21\frac{9}{11}$ (C) $4{:}30$

(D) $4:20$ (E) $4:22$

විසඳුම

4.20 සහ 4.25, අතරතුර මිනිත්තු කටුව, පැය කටුව පසු කර යයි. පැය 4 සහ මිනිත්තු $(20+t)$ කාලයේදී මෙය වේ යැයි සිතමු. මිනිත්තු කටුවේ සහ පැය කටුවේ කෝණික වේග පිලිවෙළින් මිනිත්තුවට රේඩියන $\frac{2\pi}{60}=\frac{\pi}{30}$ සහ $\frac{\frac{2\pi}{12}}{60}=\frac{\pi}{360}$ වේ.

$$(20+t)\frac{\pi}{30}=\frac{2\pi}{3}+(20+t)\frac{\pi}{360}$$

$$(20+t)\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{120}\right)=2.\quad \text{එනම් } t=\frac{240}{11}-20=\frac{20}{11} \text{ වේ.}$$

එබැවින් $4:21\frac{9}{11}$, කාලයේදී මෙය සිදුවේ. එමනිසා පිළිතුර (B) වේ.

4. p සහ q යනු ප්‍රථමක සංඛ්‍යා සහ $p > q$ වන විට පහත ඒවායින් කුමක් (කුමන ඒවා) සත්‍ය වේද?

I. p^2-q^2 යනු ප්‍රථමක සංඛ්‍යාවක් විය හැකිය
II. p^3-q^3 යනු ප්‍රථමක සංඛ්‍යාවක් විය හැකිය
III. p^4-q^4 යනු ප්‍රථමක සංඛ්‍යාවක් විය හැකිය

(A) සියල්ලම (B) III පමණි (C) I සහ III පමණි
(D) I සහ II පමණි (E) කිසිවක් නැත

විසඳුම

$3^2-2^2=5$ වන හෙයින්, I සත්‍ය වේ. $3^3-2^3=27-8=19$ ද ප්‍රථමක සංඛ්‍යාවකි, එමනිසා II ද සත්‍ය වේ. නමුත් $p^4-q^4=(p^2+q^2)(p^2-q^2)$ සහ $p^2-q^2\neq 1$වේ. එබැවින්, p^4-q^4 යන්න සැමවිටම ප්‍රථමක නොවන සංඛ්‍යාවක් වේ. එමනිසා පිළිතුර (D) වේ.

5. $2^m2^n=2^{mn}$ යන්න තෘප්ත කරන, m, n නිඛිල වන, (m, n) පටිපාටිගත යුගල ගණන කීයද?

(A) කිසිවක් නැත (B) 1 (C) 2
(D) 3 (E) 4

විසඳුම

$$\begin{aligned}2^n2^m=2^{mn} &\Leftrightarrow 2^{m+n-mn}=1\\ &\Leftrightarrow m+n-mn=0\\ &\Leftrightarrow (m-1)(n-1)=1\\ &\Leftrightarrow (m-1=1 \text{ සහ } n-1=1) \text{ හෝ } (m-1=-1 \text{ සහ } n-1=-1)\\ &\Leftrightarrow m=n=2 \text{ හෝ } m=n=0.\end{aligned}$$

එනම්, $(2,2)$ සහ $(0,0)$ යන්න දෙන ලද සමීකරණය තෘප්ත කරයි. එමනිසා පිළිතුර (C) වේ.

6. a, b, c, d යනු ධන නිඛිල නම් $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$ ට ගත හැකි එකිනෙකට වෙනස් ධන නිඛිල ගණන වන්නේ,

(A) කිසිවක් නැත (B) 5 (C) 4
(D) 10 (E) 6

විසඳුම

a, b, c, d ධන නිඛිලයන් බැවින්,

$0 < \frac{1}{a} \leq 1, 0 < \frac{1}{b} \leq 1, 0 < \frac{1}{c} \leq 1, 0 < \frac{1}{d} \leq 1$ වේ.

එහෙයින් $0 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \leq 4$ වේ. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$ යනු ධන නිඛිලයක් නම්,
$1 \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{d} \leq 4.$ වේ.
$a = b = c = d = 4$ වුවහොත් $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{d} = 1.$ වේ.
$a = b = c = d = 2$ වුවහොත් $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{d} = 2$ වේ.
$a = b = 1$ සහ $c = d = 2$ වුවහොත් $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{d} = 3$ වේ.
$a = b = c = d = 1$ වුවහොත් $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{d} = 4$ වේ. එමනිසා පිළිතුර (C) වේ.

7. a, b, c, d සහ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$ ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාද $a < b < c < d$, ද නම් $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} > 1$ සඳහා ඇති විසඳුම් ගණන වන්නේ,

(A) කිසිවක් නැත (B) 1 (C) 2
(D) 3 (E) 4

විසඳුම

$a \geq 2$ නම් $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{b} < \frac{1}{2}, \frac{1}{c} < \frac{1}{2}, \frac{1}{d} < \frac{1}{2}$ වේ.එනම්, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{d} < 2$ වේ.නමුත් $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{d}$ යන්න 2, 3 හෝ 4 වේ.(ඉහත ගැටලුවේ පිළිතුර අනුව) එනම් $a = 1.$ දැන් $b \geq 3,$ නම්, $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{3}, \frac{1}{d} < \frac{1}{3}, \frac{1}{c} < \frac{1}{3}$ වේ. එනම් $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{d} < 2.$ වේ. එනම් $b = 2$ වේ. $c \geq 4$ වුවහොත් $\frac{1}{c} \leq \frac{1}{4}, \frac{1}{d} < \frac{1}{4}$ වේ. එනම් $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{d} < 2$ වේ. එමනිසා $c = 3$ වේ.
දැන් $d \geq 4$ නිසා $\frac{1}{d} \leq \frac{1}{4}$ වේ. එනම් $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{d} \leq \frac{25}{12}$ වේ. එනම්, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{d} = 2$ වන අතර මෙය ලැබෙන්නේ $a = 1,\ b = 2,\ c = 3$ සහ $d = 6$ වු විටදීය. එහෙයින් මෙයට ඇත්තේ එක් විසඳුමක් පමණි. එමනිසා පිළිතුර (B) වේ.

8. අහහරු ග්‍රහයා මත වාසය කරන අහහරුවන්, පහත දැක්වෙන දෙදෙනකු අතර ක්‍රීඩාව ක්‍රීඩා කිරීමට ප්‍රිය කරති.කැලි 49 කින් සමන්විත ගණිත කැලි සමූහයකින් ක්‍රීඩකයන් දෙදෙනා මාරුවෙන් මාරුවට ගණිත කැලි 7 කට අඩු ගණනක් ඉවත් කරති. සමූහයේ තිබූ අවසාන ගණිත කැල්ල ගන්නා ක්‍රීඩකයාට ජය අත්වේ. එවිට,

(A) පළමු ක්‍රීඩකයාගේ දිනීමේ උපාය වන්නේ සෑම විටම 6 ගුණාකාරයක් සමූහයේ ඉතිරි වන පරිදි කැලි ඉවත් කිරීමයි.
(B) දෙවන ක්‍රීඩකයාගේ දිනීමේ උපාය වන්නේ සෑම විටම 7 ගුණාකාරයක් සමූහයේ ඉතිරි වන පරිදි කැලි ඉවත් කිරීමයි.

(C) පළමු ක්‍රීඩකයාගේ දිනීමේ උපාය වන්නේ සෑම විටම 5 ගුණාකාරයක් සමූහයේ ඉතිරි වන පරිදි කෑලි ඉවත් කිරීමයි.

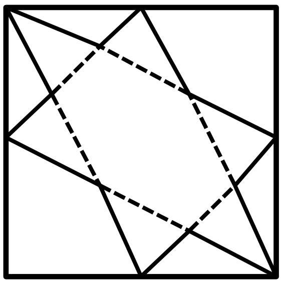
(D) දෙවන ක්‍රීඩකයාගේ දිනීමේ උපාය වන්නේ සෑම විටම 5 ගුණාකාරයක් සමූහයේ ඉතිරි වන පරිදි කෑලි ඉවත් කිරීමයි.

(E) කිසිදු ක්‍රීඩකයකුට දිනීමේ උපායක් නොමැත.

විසඳුම

7 හි ගුණාකාරයක් සෑම විටම සමූහයේ ඉතිරිවන පරිදි තරඟ කරන ඕනෑම ක්‍රීඩකයකුට මෙම තරඟය ජයගත හැකිය. ආරම්භයේ දී ගණිත කෑලි 49 ක්, එනම් 7 හි ගුණාකාරයක් ඇති බැවින් පළමු ක්‍රීඩකයාට දිනීමේ උපායක් නැත. නමුත් දෙවන ක්‍රීඩකයාට ගණිත කෑලි 7 හි ගුණාකාරයක් ඉතිරිවන පරිදි කෑලි ඉවත් කිරීම යන දිනීමේ උපායක් ඇත. එමනිසා පිළිතුර (B) වේ.

9. පාදයක දිග 1 ක් වූ සමචතුරස්‍රයක පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයන් හා ශීර්ෂ යා කරමින් පහත රූප සටහනේ දැක්වෙන තරුව ඇඳ ඇත. තරුවේ වර්ගඵලය වන්නේ

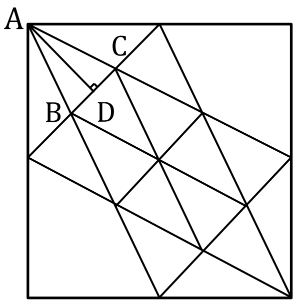


(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (E) $\frac{2}{3}$

විසඳුම

තරුව සමන්විත වන්නේ, පහත රූපයේ දැක්වෙන පරිදි අංගසම ත්‍රිකෝණ දොළහකිනි.



වර්ගඵලය $(ABC) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2} \times \cos 45^{\circ} = \frac{1}{24}$

එනම්, තරුවේ වර්ගඵලය = $12 \times \frac{1}{24} = \frac{1}{2}$ වේ. එමනිසා පිළිතුර (C) වේ.