SLMC 13 ආදර්ශ ප්‍රශ්න හා විසඳුම්

1. හාවට වඩා මීටර d_0 දුරක් ඉදිරියෙන් ඉබ්බා සිටින පරිදි තරඟය ආරම්භකර හාවෙකු සහ ඉබ්බෙකු තරඟයකට දුවයි. හාවාගේ සහ ඉබ්බාගේ වේගයන් පිළිවෙළින් u ms^{-1} සහ v ms^{-1} වන අතර $u > v$ වේ.
$t_1 = \frac{d_0}{u}, d_1 = vt_1, t_2 = \frac{d_1}{u}, d_2 = vt_2, \ldots$ ලෙස සලකන්න.
පහත ඒවායින් කුමන ප්‍රකාශය/ ප්‍රකාශ සත්‍ය වේද

I. සියළු n සඳහා $t_n > 0$

II. සියළු n සඳහා $t_1 + \cdots + t_n < \frac{d_0}{u-v}$

III. තත්පර $\frac{d_0}{u-v}$ ක කාලයකට පසුව හාවා ඉබ්බාව පසු කර යයි.

(A) I පමණි (B) II පමණි (C) I සහ II පමණි
(D) I සහ III පමණි (E) සියල්ලම

විසඳුම
$d_0 > 0$ හා සියළුම ධන නිඛිල n සඳහා $d_n > 0$ නිසා සියළුම ධන නිඛිල n සඳහා $t_n > 0$ වේ.
එමනිසා I ප්‍රකාශය සත්‍ය වේ.
දැන්,

$$t_1 = \frac{d_0}{u}$$

$$t_2 = \frac{d_1}{u} = \frac{vt_1}{u} = \frac{d_0 v}{u^2}$$

$$t_3 = \frac{d_2}{u} = \frac{vt_2}{u} = \frac{v}{u}.\frac{d_0 v}{u^2} = \frac{d_0 v^2}{u^3}$$

$$\vdots$$

$$t_n = \frac{d_0 v^{n-1}}{u^n}$$

එමනිසා $t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_n = \frac{d_0}{u} + \frac{d_0 v}{u^2} = \frac{d_0 v^2}{u^3} + \cdots + \frac{d_0 v^{n-1}}{u^n}$

$$= \frac{d_0}{u}\left(1 + \frac{v}{u} + \left(\frac{v}{u}\right)^2 + \cdots \left(\frac{v}{u}\right)^{n-1}\right)$$

$$= \frac{d_0}{u}.\frac{1-\left(\frac{v}{u}\right)^n}{1-\frac{v}{u}}$$

$$= d_0.\frac{1-\left(\frac{v}{u}\right)^n}{u-v} \text{ වේ.}$$

නමුත් $v < u \Rightarrow \left(\frac{v}{u}\right)^n < 1$. එමනිසා $t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_n < \frac{d_0}{u-v}$ වේ. එමනිසා II ප්‍රකාශයද සත්‍ය වේ.

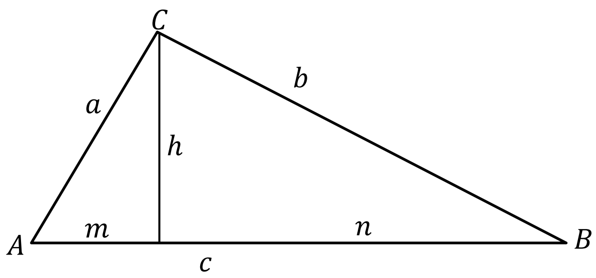
$v < u$ නිසා, T කාලයේදී හාවා විසින් ඉබ්බා ඉක්මවනු ලබන්නේ යැයි සිතමු. එවිට, $vT = uT - d_0$ වේ. $\therefore T = \frac{d_0}{u-v}$. එමනිසා III ප්‍රකාශයද සත්‍ය වේ. එමනිසා පිළිතුර (E) වේ.

සටහන මෙම ගැටලුව SLMC 2007 හි 29 වන ගැටලුව වේ. ගැටලුවක් විසඳීමෙන් එම ගැටලුව සම්බන්දයෙන් සිතීම නැවතිය නොයුතුය. ගැටලුවක් විසඳූ පසු එම විසඳුම ගැන නැවත සිතා බැලීම (looking back) ගැටලුවක් විසඳීමේ ක්‍රියාවලියේ ඉතා වැදගත් අංගයක් බව ජෝර්ජ් පොල්යා (George Polya) ඔහුගේ (*How to Solve It*) පොතේ සඳහන් කරයි.

මෙම ගැටලුවේ t_n යනු හාවා d_{n-1} දුරක් යැමට ගත කරන කාලය වේ. මෙම කාලය සැම විටම ධන නිසා එම කාලය ඇතුලත ඉබ්බා කිසියම් දුරක් ($d_n = vt_n$) යයි. එනම් ඉබ්බා සැමවිටම හාවාට ඉදිරියෙන් සිටී. එනම් හාවාට ඉබ්බා අල්ලා ගත නොහැකිය. එනම් හාවාට ඉබ්බා පසු කර යැමට නොහැකිය. මෙය III ප්‍රකාශයටත් සාමාන්‍ය බුද්ධියටත් (common sense) පටහැනිය.

මෙම ගැටලුව පදනම් වී ඇත්තේ සීනෝගේ අකිලීස් හා ඉබ්බාගේ විරුද්ධාභාසය (Zeno's Achilles and the Tortoise paradox) මත වේ. මෙම විරුද්ධාභාසයේදී පහත අයුරින් තර්කයක් සීනෝ (Zeno) ඉදිරිපත් කර ඇත. සීනෝ (Zeno) යනු 490–430 BC පමණ කාලයේ විසූ ග්‍රීක දාර්ශනිකයෙක් වේ. අකිලීස් යනු ග්‍රීක පුරාකථා සංග්‍රහයේ එන රණ ශූරයෙකි. අකිලීස් හා ඉබ්බා අතර තරඟයේදී අකිලීස් ඉබ්බාට යම් දුරක් පිටුපසින් එකම වේලාවේදී තරඟය ආරම්භ කරයි. අකිලීස් ඉබ්බා ඇල්ලීමට නම් ඉබ්බා තරඟය ආරම්භයේදී සිටි තැනට මුලින් පැමිණිය යුතුය. එයට යම් කාලයක් ගත වන අතර එම කාලයේදී ඉබ්බා යම් දුරක් යන අතර ඉබ්බා නැවතත් ඉදිරියෙන් සිටියි. නැවතත් අකිලීස්ට ඉබ්බා ඇල්ලීමට අකිලීස් ඉබ්බාගේ ආරම්භක ස්ථානයට පැමිණෙන විට ඉබ්බා සිටි ස්ථානයට පැමිණිය යුතුය. මෙම තර්කය නැවත නැවත යෙදිය හැකිය. එවිට ඉබ්බා සැම විටම අකිලීස්ට ඉදිරියෙන් සිටී. මෙම තර්කය කෙසේ බිඳ දැමිය හැකිද? □

2. ABC යනු C හි සෘජු කෝණයක් පවතින ත්‍රිකෝණයකි. AC, BC සහ AB හි දිග පිලිවෙලින් a, b සහ c වේ. C ශීර්ෂයේ සිට AB ට ඇඳි ලම්බකයේ උස h වන අතර, එමගින් AB පිලිවෙලින් m හා n දිගින් යුත් කොටස් දෙකකට බෙදේ. පහත ඒවායින් සත්‍ය නොවන්නේ කුමක්ද ?

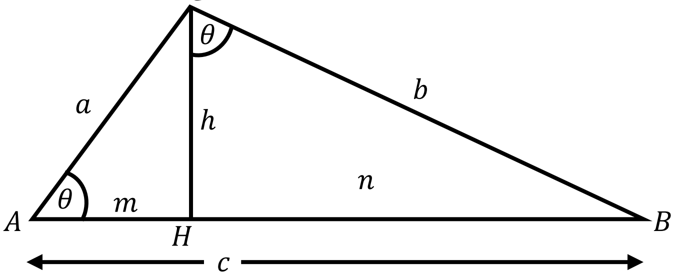


(A) $\frac{a^2}{b^2} = \frac{m}{n}$ (B) $n = \frac{b^2}{c}$ (C) $h^2 = mn$

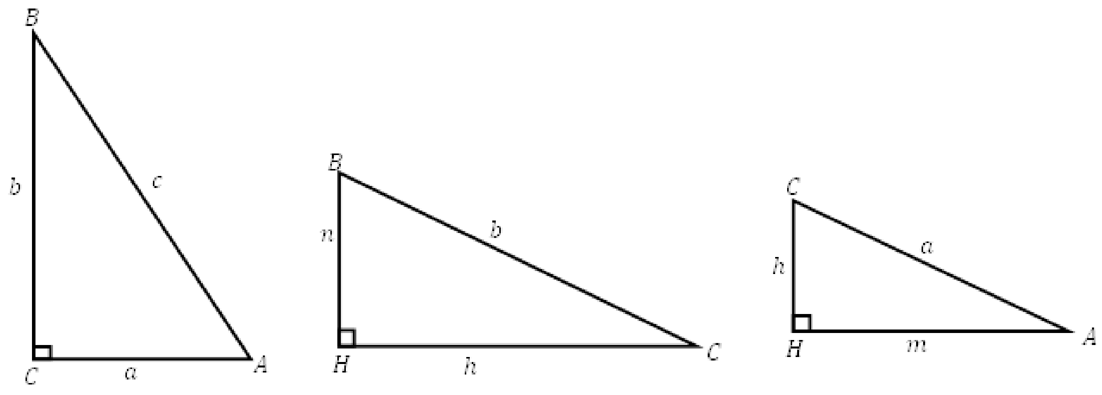
(D) $\frac{h^2}{n} = \frac{b^2}{c}$ (E) $h = \frac{ab}{c}$

විසඳුම

$CAH\angle = BCH\angle$.



දී ඇති වරණ වල ඇති සම්බන්දතා දිග වල් අතර ඇති අනුපාත සම්බන්දයෙන් වේ. සමරූපී ත්‍රිකෝණ වල අනුරූප පාද වල දිග එකම අනුපාතයෙන් වන නිසා *ABC* ත්‍රිකෝණයේ ඇති සමරූපී ත්‍රිකෝණ මොනවාදැයි සොයමු.

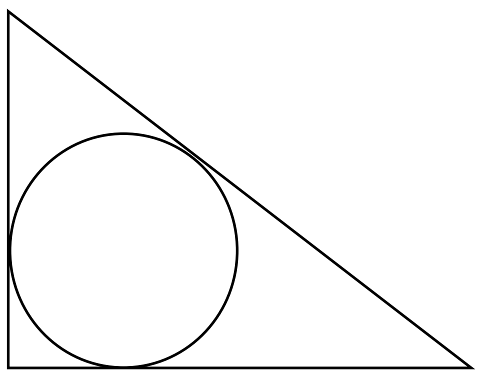


$HAC\Delta, HCB\Delta$ සහ $CAB\Delta$ සියල්ල සමරූපී වේ. එම නිසා $\frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Rightarrow h^2 = mn.$ එමනිසා (C) සත්‍ය වේ. $\frac{n}{b} = \frac{b}{c} \Longrightarrow n = \frac{b^2}{c}.$ එමනිසා (B) සත්‍ය වේ. $\frac{h}{b} = \frac{a}{c} \Rightarrow h = \frac{ab}{c}$ වේ. එමනිසා (E) සත්‍ය වේ. තවද, $\frac{a}{m} = \frac{c}{a} \Rightarrow a^2 = mc$ සහ $n = \frac{b^2}{c} \Rightarrow b^2 = nc$ වේ. එනම්, $\frac{a^2}{b^2} = \frac{mc}{nc} = \frac{m}{n}$ වේ. එමනිසා (A) සත්‍ය වේ.

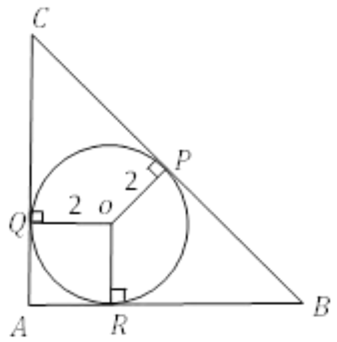
එනම්, (D) $\frac{h^2}{n} = \frac{b^2}{c}$ යන්න සත්‍ය නොවිය යුතුය. දැන් $\frac{h^2}{n} = m$ සහ $\frac{b^2}{c} = n$ වේ. එනම් $\frac{h^2}{n} = \frac{b^2}{c}$ විට $m = n$ වේ. නමුත් m, n ට සමාන විය යුතුම නැත. එමනිසා පිළිතුර (D) වේ. □

3. පැතිවල දිග පූර්ණ සංඛ්‍යා වූත් අරය ඒකක 2ක් වූ වෘත්තයක් අන්තර්ගත කර ඇතිවුත් සෘජුකෝණි ත්‍රිකෝණයක උපරිම වර්ගඵලය වන්නේ,

(A) 24 (B) 30 (C) 54 (D) 60 (E) 48



විසඳුම



$AQ = AR = 2, BR = BP, CQ = CP$. $BR = BP = x$ හා $CQ = CP = y$ ලෙස ගනිමු.

දැන් පෛතගරස් ප්‍රමේයයෙන්, $(x+2)^2 + (y+2)^2 = (x+y)^2$ බව ලැබේ. මෙය ප්‍රසාරණයෙන්

$x^2 + 4x + y^2 + 4y + 8 = x^2 + 2xy + y^2$ බව ලැබේ.

$4x + 4y - 2xy + 8 = 0$

$\Rightarrow 2x + 2y - xy + 4 \quad = 0$

$\Rightarrow (x-2)(y-2) \qquad = 8$

$\Rightarrow (x - 2 = 1$ සහ $y - 2 = 8)$ හෝ $(x - 2 = 2$ සහ $y - 2 = 4)$

$\Rightarrow (x = 3$ සහ $y = 10)$ හෝ $(x = 4$ සහ $y = 6)$

$x = 3$ සහ $y = 10$ නම්, වර්ගඵලය $= \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 30$ සහ

$x = 4$ සහ $y = 6$, නම්, වර්ගඵලය $= \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$

එහෙයින් උපරිම වර්ගඵලය 30 කි. එමනිසා පිළිතුර (B) වේ. □